La congettura di Collatz
da un punto di vista elementare

ARDITO Prof. Nicola
n.ardito52@gmail.com oppure **n_ardito@alice.it**

BARI – ITALIA **Data: 11 dicembre 2024**

Astratto

Uno tra i problemi di matematica elementare, a tutt'oggi irrisolto, è la congettura di Collatz (dal matematico Lothar Collatz). Essa riguarda la seguente funzione tra numeri naturali:

f: N →N

$$f(N)=\begin{cases} N/2 & \text{se n è pari} \\ 3*N+1 & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

Iterando la funzione più volte dopo un certo numero di iterazioni si ottiene il numero 1 e continuando le iterazioni si ha il ciclo 1–4–2–1. Quindi il numero iniziale N, nelle iterazioni successive, viene moltiplicato per 3 (sommando 1) e diviso per 2 per cui è una successione di passaggi dispari (quando si moltiplica per 3 e si aggiunge 1) e di passaggi pari (quando si divide per 2) che, dopo un certo numero totale di passaggi pari b_i e un certo numero totale di passaggi dispari a_i, converge ad 1 in base alla relazione $\frac{3^{a_i}*N*Res_i}{2^{b_i}}=1$ dove Res_i è il residuo finale che è compreso tra **1,1** ed **1,25** per il riferimento **[1]** e quindi si avrà $\frac{3^{a_i}*N}{2^{b_i}}<1$. In questo articolo viene presentata una nuova congettura equivalente alla congettura canonica di Collatz. Infatti, di seguito la congettura di Collatz da me personalizzata sarà applicata in un modo più veloce considerando solo numeri naturali N modulo 4 e che la successione di questi numeri (dopo un numero iniziale che può essere anche pari mod. 4) si riduce alla successione dei soli numeri dispari ≡ 1 mod. 4 e ≡ 3 mod. 4. Questo modo di procedere porta agli stessi risultati della successione di Collatz canonica. Si indicherà di seguito con a_k il totale dei passaggi dispari e con b_k il totale dei passaggi pari ottenuti in un certo numero **k** di iterazioni successive e si indicherà con N[10] il valore del numero N dopo 10 passaggi complessivi sia pari che dispari. Inoltre, si indicherà con il termine "passaggio doppio" il passaggio di N ad $\frac{3*N+1}{2}$ cioè il passaggio dispari seguito sempre da un passaggio pari. I numeri dispari N ≡ 1 mod. 4 e N ≡ 3 mod. 4 verranno indicati in seguito anche e rispettivamente con $N=4*h_0+1$ e $N=4*h_0+3$ ed i loro successivi nella successione di Collatz verranno indicati con $N1=4*h_1+1$ e $N1=4*h_1+3$ ……. $Nn=4*h_n+1$ e $Nn=4*h_n+3$ dove $h_0, h_1, h_{2,\ldots}, h_{n,\ldots}$ si chiameranno i coefficienti del 4 dei rispettivi numeri dispari N, N1, N2,…..,Nn… ≡ 1 mod. 4 e ≡ 3 mod. 4.
Inoltre, chiamerò in seguito tutti i numeri pari N ≡ 0 mod. 4 numeri del tipo 1, tutti i numeri pari N ≡ 2 mod. 4 numeri del tipo 2, tutti i numeri dispari N ≡ 1 mod. 4 numeri del tipo 3 e tutti i numeri dispari N ≡ 3 mod. 4 numeri del tipo 4.

1 Introduzione

Nella mia successione di Collatz, personalizzata e più veloce, all'inizio di ogni iterazione si hanno i seguenti 6 casi con numeri mod. 4 diversi tra loro di cui 2 pari e 4 dispari e sono:

1. se il numero iniziale N della successione è pari con N ≡ 0 mod 4 per cui si può scrivere $N=2^p*(1+2*k)$ per ogni k≥0 e p≥2 numeri naturali e (1+2*k) intero dispari e quindi per la successione di Collatz dopo p passaggi singoli pari, in cui si divide p volte N per 2, porta al numero $N[p]=(2*k+1)$ dispari e quindi ad un numero minore del numero iniziale N. Il numero $N[p]=(2*k+1)$ è 2*k+1 ≡ 1 mod 4 se k è pari mentre è 1+2*k ≡ 3 mod 4 se k è dispari e quindi in questa iterazione iniziale (da N a $N[p]=(2*k+1)$) i passaggi dispari sono a_1**=0** mentre i passaggi pari sono b_1**=p** (la differenza iniziale tra pari e dispari da zero è aumentata di p unità, cioè b_1-a_1**=p**);

2. se il numero iniziale N della successione è pari con N ≡ 2 mod 4 per cui si può scrivere $N=4*k+2$ per ogni k≥0 allora il suo successivo nella successione (dopo 1 passaggio pari) è il numero dispari $N=2*k+1$ il quale è dispari e minore di N. Se k è pari 2*k+1 ≡ 1 mod 4 invece se k è dispari 2*k+1

≡ 3 mod 4 e quindi in questa iterazione (da **N a N[1]=2*k+1**) i passaggi dispari sono a_1**=0** mentre i passaggi pari sono b_1**=1** (la differenza tra pari e dispari da zero è aumentata di 1 unità, cioè b_1-a_1**=1**);

3. se il numero N iniziale in ogni iterazione della successione è dispari cioè N ≡ 1 mod 4 e si può scrivere $N = 4 * (1 + 2 * k) + 1$ per ogni k≥0 (quindi 1+2*k è dispari) allora il suo successivo nella successione (dopo un passaggio dispari e due passaggi pari) è il numero pari $N[3] = 3 * (1 + 2 * k) + 1$ il quale è isopath al numero dispari 1+2*k (quindi «cambio di orbita» e non vi è più il passaggio dispari poiché $(N[3] - 1)/3 = 1 + 2 * k$) e la successione continuerà con il numero $N[2] = 1 + 2 * k$ dispari e minore di N per cui in questa iterazione (da N a $N[2] = 2 * k + 1$) i passaggi dispari sono a_1**=0** mentre i passaggi pari sono b_1**=2**. Inoltre, è ovvio che il numero $N[2] = 2 * k + 1$ se k è pari sarà 1+2*k ≡ 1 mod 4 mentre se k è dispari sarà 1+2*k ≡ 3 mod 4 (la differenza tra pari e dispari è aumentata di 2 unità, cioè b_1-a_1**=2**);

4. se il numero N iniziale in ogni iterazione della successione è dispari cioè N ≡ 1 mod 4 e si può scrivere $N = 4 * (2 * k) + 1$ per ogni k≥0 (quindi 2*k è pari) allora il suo successivo nella successione (dopo un passaggio dispari e due passaggi pari) è il numero dispari $N[3] = 3 * (2 * k) + 1 = 6 * k + 1$ il quale è dispari e minore di N per cui in questa iterazione (da N a $N[3] = 6 * k + 1$) i passaggi dispari sono a_1**=1** mentre i passaggi pari sono b_1**=2**. Inoltre, è ovvio che il numero 6*k+1 se k è pari sarà $N[3] = 6 * k + 1$ ≡ 1 mod 4 mentre se k è dispari sarà $N[3] = 6 * k + 1$ ≡ 3 mod 4 (la differenza tra pari e dispari è aumentata di 1 unità, cioè b_1-a_1**=1**);

5. se il numero N iniziale in ogni iterazione della successione è dispari cioè N ≡ 3 mod 4 e quindi N+1 è pari e si può scrivere $N + 1 = 2^p * (1 + 2 * k)$ da cui $N = 2^p * (1 + 2 * k) - 1$ con **k≥0** e **p≥2**. Si dimostra (vedere **teoremi 2.1 – 2.2** e **nota 2.1**) che se k e p sono entrambi dispari od entrambi pari allora il suo successivo nella successione (dopo p-1 passaggi dispari e p+1 passaggi pari) è il numero dispari $N[2 * p] = \frac{[3^{(p-1)} * (1+2*k)-1]}{2}$ e quindi i passaggi dispari sono a_1**=p-1** mentre i passaggi pari sono b_1**=p+1** (la differenza tra pari e dispari è aumentata di 2 unità, cioè b_1-a_1**=2**);

6. se il numero iniziale N della successione è dispari cioè N ≡ 3 mod 4 e quindi N+1 è pari e si può scrivere$N + 1 = 2^p * (1 + 2 * k)$ da cui $N = 2^p * (1 + 2 * k) - 1$ per ogni **k≥0** e **p≥2**. Si dimostra (vedere **teoremi 2.1 – 2.2** e **nota 2.1**) che con k pari e p dispari oppure con k dispari e p pari allora il suo successivo nella successione (dopo p passaggi dispari e p+1 passaggi pari) è il numero dispari $N[2 * p + 1] = \frac{[3^p * (1+2*k)-1]}{2}$ e quindi i passaggi dispari sono a_1**=p** mentre i passaggi pari sono b_1**=p+1** (la differenza tra pari e dispari è aumentata di 1 unità, cioè b_1-a_1**=1**).

TABELLA RIASSUNTIVA DEI 6 CASI VALIDA PER OGNI k>=0 E PER OGNI p>=2.

Caso 1.	N ≡ 0 mod 4 --> N=2^p*(1+2*k)	N[p]=(1+2*k) --> ≡ 1 mod 4 se k è pari e si continua con caso 3, oppure caso 4. N[p]=(1+2*k) --> ≡ 3 mod 4 se k è dispari e si continua con caso 5, oppure caso 6.
Caso 2.	N ≡ 2 mod 4 --> N=4*k+2	N[1]=2*k+1 --> ≡ 1 mod 4 se k è pari e si continua con caso 3, oppure caso 4. N[1]=2*k+1 --> ≡ 3 mod 4 se k è dispari e si continua con caso 5, oppure caso 6.
Caso 3.	N ≡ 1 mod 4 --> N=4*(1+2*k)+1	N[2]=(1+2*k) --> ≡ 1 mod 4 se k è pari e si continua con caso 3, oppure caso 4. N[2]=(1+2*k) --> ≡ 3 mod 4 se k è dispari e si continua con caso 5, oppure caso 6.
Caso 4.	N ≡ 1 mod 4 --> N=4*(2*k)+1	N[3]=(6*k)+1 --> ≡ 1 mod 4 se k è pari e si continua con caso 3, oppure caso 4. N[3]=(6*k)+1 --> ≡ 3 mod 4 se k è dispari e si continua con caso 5, oppure caso 6.
Caso 5.	N ≡ 3 mod 4 --> N=2^p*(1+2*k)-1	N[2*p]=[3^(p-1)*(1+2*k)-1]/2 se k e p sono entrambi pari o dispari e si continua con caso 3. oppure caso 4. oppure caso 5. oppure caso 6.
Caso 6.	N ≡ 3 mod 4 --> N=2^p*(1+2*k)-1	N[2*p+1]=[3^(p)*(1+2*k)-1]/2 se k è pari e p è dispari oppure se k è dispari e p è pari e si continua con caso 3. oppure caso 4. oppure caso 5. oppure caso 6.

Si deduce che sin dalla prima iterazione si ha $b_1>a_1$ e nelle iterazioni successive si ha che b_i aumenta più di a_i e che la loro differenza in ogni iterazione cresce di 1 oppure di 2 unità rispetto alla iterazione precedente.

2 Dimostrazione dei primi teoremi:

Considerazione importante 2.1: se all'inizio di ogni iterazione della successione abbiamo il numero N del tipo N ≡ 3 mod 4, che si può scrivere $N = 2^p * (1 + 2 * k) - 1$ con **k≥0** e **p≥2**, esso ha p passaggi doppi consecutivi, cioè tutti i passaggi del tipo (3*N+1)/2 che hanno un passaggio dispari (moltiplicare per 3 e aggiungere 1) seguito sempre da un "unico" passaggio pari (dividere per 2) e così via. Per esempio $N = 2127 = 4 * 531 + 3$ tipo N ≡ 3 mod 4 il suo successivo è $N + 1 = 2128 = 2^4 * 133$ quindi (1+2*k)=133 e p=4 e si nota che N=2127 nella sua successione di Collatz ha 4 passaggi doppi cioè N[2]=(3*2127+1)/2=3191 → N[4]=(3*3191+1)/2=4787 → N[6]=(3*4787+1)/2=7181→ N[8]=(3*7181+1)/2=10772 e dopo si ha un passaggio singolo pari → N[9]=10772/2=5384. Si nota che dopo i 9 passaggi, di cui 4 doppi ed un passaggio pari, il numero ottenuto N[9]=5384 è maggiore del numero N[0]=2127 iniziale.

Considerazione importante 2.2: il terzo tipo N ≡ 1 mod 4 (cioè N=4*h_0+1) porta dopo un passaggio doppio ed uno singolo al numero N[3]=3*h_0+1 che nel caso in cui h_0 è dispari il numero N[3]=3*h_0+1 è isopath al numero N'= h_0 poiché essendo h_0 dispari il successivo di N'= h_0 come passaggio singolo è proprio N'[1]=3*h_0 + 1. Quindi il numero iniziale N=4*h_0+1 ed N'= h_0 se h_0 è dispari confluiscono, nella successione di Collatz, entrambi al numero N[3]=3*h_0+1 (quindi N ed N' si dicono isopath). In questo caso diremo che il numero iniziale N=4*h_0+1 ed N'= h_0 continuano con l'orbita di N[3]=3*h_0+1 e quindi se uno tra di essi soddisfa la congettura anche gli altri 2 la soddisfano. Se accade questo diremo che vi è stato un «cambio di orbita». Se invece h_0 è pari non c'è cambio di orbita e la successione continua con N[3]=3*h_0+1.

Dalle considerazioni precedenti possiamo affermare che solo il successivo del numero N ≡ 3 mod 4 (cioè N=4*h_0 +3) nella successione di Collatz aumenta mentre tutti gli altri mod. 4 dopo massimo 2 passaggi doppi sono minori del numero iniziale N.

Teorema n.2.1 Ogni numero $N = 2^p * (1 + 2 * k) - 1$ con k≥0 e p≥2 del tipo N ≡ 3 mod 4 si trasforma nella successione di Collatz nel numero $N[2 * p - 2] = 3^{(p-1)} * 2 * (1 + 2 * k) - 1$ dopo p-1 passaggi doppi.
Dimostrazione. Il numero $N = 2^p * (1 + 2 * k) - 1$ è dispari ed applichiamo ad N il passaggio doppio per cui $N[2] = \frac{3*(2^p*(1+2*k)-1)+1}{2} = 3 * 2^{(p-1)} * (1 + 2 * k) + \frac{-3+1}{2} = 3 * 2^{(p-1)} * (1 + 2 * k) - 1$ che è dispari per cui applichiamo di nuovo il passaggio doppio (in effetti ad ogni passaggio doppio l'esponente di 3 aumenta di 1,l'esponente del 2 diminuisce di 1 ed (1+2*k) e -1 rimangono) e quindi si ha $N[4] = 3^2 * 2^{(p-2)} * (1 + 2 * k) - 1$ che è dispari e quindi si applicherà il passaggio doppio finché l'esponente del 2 (cioè p-2) diventa 1 e quindi l'esponente del 3 diventa p-1 e di conseguenza $N[2 * (p - 1)] = 3^{(p-1)} * 2 * (1 + 2 * k) - 1$. **c.v.d.**

Verifichiamo con degli esempi il teorema precedente. Consideriamo il numero N=4*37+3=151 per cui $N + 1 = 152 = 2^3 * 19$ per cui p=3 e (1+2*k)=19. Per il teorema precedente dopo p-1=2 passaggi doppi si avrà nella successione di Collatz il numero $N[4] = 3^2 * 2 * 19 - 1 = 341$ ed infatti applichiamo i 2 passaggi doppi ad N=151 quindi N[2]=(3*151 +1)/2=227 → N[4]=(3*227 +1)/2=341 si ha lo stesso risultato.
Consideriamo ancora il numero N=4*1839+3=7359 per cui $N + 1 = 7360 = 2^6 * 115$ per cui p=6 e (1+2*k)=115. Per il teorema precedente dopo p-1=5 passaggi doppi si avrà nella successione di Collatz il numero $N[10] = 3^5 * 2 * 115 - 1 = 55889$ ed infatti applichiamo i 5 passaggi doppi ad N=7359 quindi N[2]=(3*7359+1)/2=11039 → N[4]=(3*11039+1)/2=16559 → N[6]=(3*16559+1)/2=24839 → N[8]=(3*24839 +1)/2=37259 → N[10]=(3*37259 +1)/2=55889 si ha lo stesso risultato.

Teorema n.2.2 Ogni numero $N = 2^p * (1 + 2 * k) - 1$ con k≥0 e p≥2 del tipo N ≡ 3 mod 4 trasformato in $N[2 * p - 2] = 3^{(p-1)} * 2 * (1 + 2 * k) - 1$ dal teorema n.2.1 è del tipo ≡ 1 mod 4 che possiamo scrivere N[2*(p-1)] =4*h_1+1 nella congettura. Si dimostra N[2*p-1]=3* h_1+1 se h_1 è pari oppure si trasforma in N[2*p]= h_1 se h_1 è dispari con $h_1 = \frac{3^{(p-1)}*(1+2*k)-1}{2}$.
Dimostrazione. Il numero $N[2 * p - 2] = 3^{(p-1)} * 2 * (1 + 2 * k) - 1$ che risulta dopo l'applicazione del teorema n.2.1 è dispari per cui risulta essere del tipo 3 oppure 4. Non può essere del tipo 4 cioè 4* h_1+3 poiché da $N[2 * p - 2] = 3^{(p-1)} * 2 * (1 + 2 * k) - 1$ = **4* h_1+3** si avrebbe $h_1 = \frac{3^{(p-1)}*2*(1+2*k)-4}{4} = 3^{(p-1)} * \frac{1+2*k}{2} - 1$
che è impossibile perchè $\frac{3^{(p-1)}*(1+2*k)}{2}$ è decimale in quanto sia $3^{(p-1)}$ che **(1+2*k)** sono dispari e quindi il loro prodotto è dispari e non divisibile per 2. Quindi è del tipo 3 perchè da $N[2 * p - 2] = 3^{(p-1)} * 2 * (1 + 2 * k) - 1$ =

$4 * h_1 + 1$ si ha $h1 = \frac{(3^{(p-1)} * 2 * (1+2*k) - 2)}{4} = \frac{(3^{(p-1)} * (1+2*k) - 1)}{2}$ che è intero in quanto $3^{(p-1)} * (1 + 2 * k)$ è dispari e sottraendo 1 diventa pari per cui è divisibile per 2. Quindi per la Considerazione importante 2.2 precedente si ha che il trasformato dal teorema n.1 diventa $N[2 * (p-1) + 3] = N[2 * p + 1] = 3 * h_1 + 1$ se h_1 è pari oppure si trasforma in $N[2 * (p-1) + 2] = N[2 * p] = h_1$ se h_1 è dispari con $h_1 = \frac{(3^{(p-1)} * (1+2*k) - 1)}{2}$ **.c.v.d.**

Verifichiamo con degli esempi il teorema n.2 precedente. Consideriamo il numero N[0]=4*37+3=151 per cui $N[0] + 1 = 152 = 2^3 * 19$ per cui p=3 e (1+2*k)=19 che per il teorema n.1 dopo p-1=2 passaggi doppi nella successione di Collatz diventa il numero $N[4] = 3^2 * 2 * 19 - 1 = 341$ che è del tipo 4* h_1 +1 con h_1 =(341-1)/4=85 che è dispari per cui si ha cambio orbita ed N[6]=85 e quindi N[7]=3*85+1=256. Se si continua la successione normalmente con N[4]=341 si ha N[6]=(3*341+1)/2=1024 da cui N[8]=256 e quindi si verifica che i numeri 341 ed 85 sono tra di loro isopath perché entrambi hanno il numero 256 nelle loro successioni.
Consideriamo ancora il numero N[0]=4*1839+3=7359 per cui $N[0] + 1 = 7360 = 2^6 * 115$ per cui p=6 e (1+2*k)=115 che per il teorema n.1 dopo p-1=5 passaggi doppi nella successione di Collatz diventa il numero $N[10] = 3^5 * 2 * 115 - 1 = 55889$ che è del tipo 4* h_1 +1 con h_1 =(55889-1)/4=13972 che è pari per cui si ha N[13]=3*13972+1=41917. Se si continua la successione normalmente con N[10]=55889 si ha N[12]=(3*55889+1)/2=83834 che è pari da cui N[13]=83834/2=41917.

Nota 2.1: Quindi dai **teoremi n.2.1 e n.2.2** si ha che ogni numero N[0]=4*h_0+3 del tipo 4 con $N[0] + 1 = 2^p * (1 + 2 * k)$ dove p è la periodicità di N[0]+1 rispetto al 2 ed (1+2*k) numero intero positivo dispari si trasforma in N[2*p+1]=3*h_1+1 se h_1 è pari oppure si trasforma in N[2*p]= h_1 se h_1 è dispari dove $h_1 = \frac{(3^{(p-1)} * (1+2*k) - 1)}{2}$. Quindi all'inizio nella successione di Collatz o durante la stessa ogni volta che otteniamo un numero dispari di tipo 4 con molteplicità p seguito come sappiamo da un numero dispari del tipo 3 usando i teoremi precedenti si ha un incremento di passaggi dispari uguale a **p** ed un incremento dei passaggi pari uguale a **p+1** se il numero di tipo 3 si trasforma in 3* h_1 +1 con h_1 pari oppure un incremento di passaggi dispari uguale a **p-1** ed un incremento dei passaggi pari uguale a **p+1** se il numero di tipo 3 si trasforma in h_1 dispari. Inoltre sappiamo che h_1 diventa $h1 = \frac{(3^{(p-1)} * (1+2*k) - 1)}{2} = k * 3^{(p-1)} + \frac{(3^{(p-1)} - 1)}{2}$ cioè somma di due addendi di cui il primo $k * 3^{(p-1)}$ può essere pari o dispari se k è pari o dispari mentre il secondo addendo $\frac{(3^{(p-1)} - 1)}{2}$ è pari o dispari se p-1 è rispettivamente pari o dispari (infatti se p-1=2 pari si ha (3^2-1)/2=(9-1)/2=4 pari se invece p-1=3 dispari si ha (3^3-1)/2=(27-1)/2=13 dispari) quindi:

a) se **k e p-1 sono entrambi pari oppure entrambi dispari (oppure se k e p sono uno pari e l'altro dispari)** si ha che **h_1 è pari** per cui il tipo di numero successivo per il Teorema n.2.2 è $N[2 * (p-1) + 3] = 3 * h_1 + 1$ cioè $N[2 * p + 1] = 3 * h_1 + 1$;
b) **se k e p-1 sono uno pari e l'altro dispari o viceversa (oppure se k e p sono entrambi pari oppure entrambi dispari)** si ha che **h_1 è dispari** per cui il tipo di numero successivo per il Teorema n.2.2 è $N[2 * (p-1) + 3] = h_1$ cioè $N[2 * p + 1] = h_1$.

Teorema n.2.3 Ogni numero del tipo N=4*h_0+3 è trasformato dai teoremi n.2.1 e n.2.2 in un numero dispari del tipo 3 e precisamente in N[2*(p-1)+3]=3*h_1+1 se h_1 è pari oppure si trasforma in N[2*(p-1)+2]= h_1 se h_1 è dispari. Si dimostra che $h_1 = \frac{[3^{(p-1)} * (1+2*k) - 1]}{2}$ e che se k e p-1 sono entrambi pari oppure entrambi dispari si ha $N[2 * p + 1] = \frac{[3^{(p)} * (1+2*k) - 1]}{2}$ mentre se k è pari e p-1 è dispari o viceversa si ha $N[2 * p] = \frac{[3^{(p-1)} * (1+2*k) - 1]}{2}$.
Dimostrazione. Dal teorema n.2.1 sappiamo che $N[2 * p - 2] = 3^{(p-1)} * 2 * (1 + 2 * k) - 1$ e dal teorema n.2.2 si ha che è del tipo 3 cioè sarà uguale a 4*h_1+1 e si ha $N[2 * p - 2] = 3^{(p-1)} * 2 * (1 + 2 * k) - 1$ = **4*h_1+1** da cui si ricava $h_1 = \frac{[3^{(p-1)} * 2 * (1+2*k) - 2]}{4} = \frac{[3^{(p-1)} * (1+2*k) - 1]}{2}$. Inoltre dalla **nota 2.1** sostituendo il valore di h_1 si ha che se k e p-1 sono entrambi pari oppure entrambi dispari allora è $N[2 * p + 1] = 3 * h_1 + 1 = 3 * \frac{[3^{(p-1)} * (1+2*k) - 1]}{2} + 1 = \frac{[3^{(p)} * (1+2*k) - 3]}{2} + 1 = \frac{[3^{(p)} * (1+2*k) - 1]}{2}$ mentre se k e p-1 sono uno pari e l'altro dispari o viceversa si ha $N[2 * p] = h_1 = \frac{[3^{(p-1)} * (1+2*k) - 1]}{2}$. **c.v.d.**

Teorema n.2.4 In ogni successione se otteniamo un numero del tipo N=3*h_1+1 con h_1 pari e multiplo di 4 esso è del tipo 3 cioè N=4*h_2+1 mentre se h_1 pari e multiplo di 2 esso è del tipo 4 cioè N=4*h_2+3. Quindi nel primo caso si ha h_2=3* h_1/4 mentre nel secondo caso si ha che h_2=3* h_1/4-1/2.

Dimostrazione. Infatti, dall'uguaglianza **3*h1+1=4*h2 +1** otteniamo la seguente uguaglianza **h2=3*h1/4** **e** dall'uguaglianza **3*h1+1=4*h2 +3** otteniamo la seguente uguaglianza **h2=3*h1/4-1/2**. **c.v.d.**

Teorema n.2.5 In ogni successione se otteniamo un numero del tipo N= h_1 con h_1 dispari esso è del tipo 3 cioè N=4*h_2+1 se h_1 è successivo ad un multiplo di 4 oppure del tipo 4 cioè N=4*h_2+3 se h_1 è precedente ad un multiplo di 4. Quindi nel primo caso si ha nel h_2=(h_1-1)/4 mentre nel secondo caso si ha che h_2=(h_1-3)/4 .

Dimostrazione. Infatti, dall'uguaglianza h_1 =4* h_2+1 otteniamo la seguente uguaglianza h2=(h1-1)/4 e dall'uguaglianza h1 =4* h2+3 otteniamo la seguente uguaglianza h2=(h1-3)/4. **c.v.d.**

3 Successione di Collatz personalizzata

Nella successione di Collatz personalizzata dopo gli eventuali numeri iniziali pari **N=4*h_0 +0 oppure N=4*h_0 +2 si avranno numeri dispari del tipo N=4*h_1 +3 oppure del tipo N=4*h_1 +1 che in base ai teoremi precedenti si trasformano sempre in numeri dispari del tipo 3*h_2 +1 con h_2 pari, oppure dispari del tipo h_2 i quali a loro volta sono numeri dispari del tipo N=4*h_3 +3 oppure del tipo N=4*h_3 +1 e così via in ogni iterazione. Infatti,** nella successione di Collatz personalizzata si verificano singolarmente in ogni iterazione i seguenti casi **:**

a) se si inizia la successione con un numero pari N ≡ 0 mod.4 del tipo $\boldsymbol{N = 2^p * (1 + 2 * k)}$ per il caso 1. della introduzione nella iterazione successiva si ha N[p]=(1+2*k) dispari e minore del numero iniziale N. Il numero N[p]=(1+2*k) è 1+2*k ≡ 1 mod 4 se k è pari mentre è 1+2*k ≡ 3 mod 4 se k è dispari e quindi in questa iterazione iniziale (da N a N[p]= 2*k+1) i passaggi dispari sono ***a*=0** mentre i passaggi pari sono ***b*=p** (la differenza iniziale tra pari e dispari da zero è aumentata di p unità, cioè **b-a=p**) e si continua poi con i casi 3. oppure 4. oppure 5. oppure 6. della introduzione considerando tutti i teoremi precedenti;
b) se invece si inizia la successione con un numero pari N ≡ 2 mod.4 del tipo $\boldsymbol{N = 4 * k + 2}$ per il caso 2. della introduzione nella iterazione successiva $\boldsymbol{N[1] = 2 * k + 1}$ il quale è dispari e minore di N. Se k è pari 2*k+1 ≡ 1 mod 4 invece se k è dispari 2*k+1 ≡ 3 mod 4 e quindi in questa iterazione (da **N a N[1]=2*k+1**) i passaggi dispari sono ***a*=0** mentre i passaggi pari sono ***b*=1** (la differenza tra pari e dispari da zero è aumentata di 1 unità, cioè ***b-a*=1**) e si continua poi con i casi 3. oppure 4. oppure 5. oppure 6. della introduzione considerando tutti i teoremi precedenti;
c) se invece si inizia la successione con un numero dispari N ≡ 1 mod.4 con $\boldsymbol{N = 4 * (1 + 2 * k) + 1}$ per il caso 3. della introduzione nella iterazione successiva si ha il numero dispari e minore di N cioè N[2]=1+2*k per cui in questa iterazione (da N a N[2]=2*k+1) i passaggi dispari sono ***a*=0** mentre i passaggi pari sono ***b*=2**. Inoltre, se k è pari sarà 1+2*k ≡ 1 mod 4 e si continua poi con i casi 3. oppure 4. della introduzione mentre se k è dispari sarà 1+2*k ≡ 3 mod 4 e si continua poi con i casi 5. oppure 6. della introduzione considerando tutti i teoremi precedenti (la differenza tra pari e dispari è aumentata di 2 unità, cioè ***b-a*=2**);
d) se invece si inizia la successione con un numero dispari N ≡ 1 mod.4 con $\boldsymbol{N = 4 * (2 * k) + 1}$ per il caso 4. della introduzione nella iterazione successiva si ha il numero dispari e minore di N cioè N[3]=3*(2*k)+1=6*k+1 per cui in questa iterazione (da N a N[3]=6*k+1) i passaggi dispari sono ***a*=1** mentre i passaggi pari sono ***b*=2**. Inoltre, se k è pari sarà N[3]=6*k+1 ≡ 1 mod 4 e si continua poi con i casi 3. oppure 4. della introduzione mentre se k è dispari sarà N[3]=6*k+1 ≡ 3 mod 4 e si continua poi con i casi 5. oppure 6. della introduzione considerando tutti i teoremi precedenti (la differenza tra pari e dispari è aumentata di 1 unità, cioè ***b-a*=1**);
e) se invece si inizia la successione con un numero dispari N ≡3 mod.4 con $\boldsymbol{N = 2^p * (1 + 2 * k) - 1}$ con **k≥0** e **p≥2** si ha per il Teorema n.2.3 nella iterazione successiva il numero $\boldsymbol{N[2 * p] = \frac{[3^{(p-1)} * (1+2*k)-1]}{2}}$ dispari e maggiore di N se **k è pari e p-1 è dispari o viceversa** (la differenza tra pari e dispari è aumentata di 2 unità, cioè ***b-a*=2**) e si continua poi con i casi 3. oppure 4. oppure 5. oppure 6. della introduzione considerando tutti i teoremi precedenti.
f) se invece si inizia la successione con un numero dispari N ≡3 mod.4 con $\boldsymbol{N = 2^p * (1 + 2 * k) - 1}$ con **k≥0** e **p≥2** si ha per il Teorema n.2.3 nella iterazione successiva il numero $\boldsymbol{N[2 * p + 1] = \frac{[3^{(p)} * (1+2*k)-1]}{2}}$ dispari e maggiore di N se **k e p-1 sono entrambi pari oppure entrambi dispari** (la differenza tra pari e dispari è aumentata di 1 unità, cioè ***b-a*=1**) e si continua poi con i casi 3. oppure 4. oppure 5. oppure 6. della introduzione considerando tutti i teoremi precedenti.

Nota 3.1. Ora consideriamo una qualunque iterazione **i** della successione con numero iniziale dispari N ≡ 1 mod.4 oppure N ≡ 3 mod.4 ed indichiamo con $\mathbf{T_{1i}}$ la somma di tutte le iterazioni precedenti compresa la iterazione considerata in cui c'è stato l'aumento di 1 unità nella differenza tra **b-a** (punti d) ed f) precedenti) ed indichiamo con $\mathbf{T_{2i}}$ la somma di tutte le iterazioni compresa la iterazione considerata in cui c'è stato

l'aumento di 2 unità nella differenza tra **b-a** (punti c) ed e) precedenti) quindi nella iterazione considerata si ha la seguente uguaglianza $b_i - a_i = T_{1i} + 2*T_{2i}$ dove b_i è il totale dei passaggi pari ed a_i è il totale dei passaggi dispari in tutte le iterazioni compresa la iterazione considerata. Infatti se indico con $\sum_1^i(p-1)$ la somma di tutti i valori di **p-1** (**p** ricordiamo è la molteplicità del 2 nei numeri trasformati nella successione derivanti da numeri ≡ 3 mod.4 fino alla iterazione **i** compresa) si ha che $b_i = \sum_1^i(p-1) + 2* T_{1i} + 2*T_{2i}$ ed $a_i = \sum_1^i(p-1) + T_{1i}$ per cui $b_i - a_i = \sum_1^i(p-1) + 2* T_{1i} + 2*T_{2i} - \sum_1^i(p-1) - T_{1i} = T_{1i} + 2*T_{2i}$.
Se invece il numero iniziale N ≡ 0 mod.4 è pari con $N = 2^p * (1 + 2 * k)$ allora $b_1 - a_1 = p$ e si continua nella successione con i trasformati dispari di N per cui alla differenza iniziale **p** in ogni iterazione successiva **i** si somma 1 o 2 in base alla trasformazione corrispondente per cui $b_i - a_i = p + T_{1i} + 2*T_{2i}$.
Se invece il numero iniziale N ≡ 2 mod.4 è pari con $N = 4 * k + 2$ allora $b_1 - a_1 = 1$ e si continua nella successione con i trasformati dispari di N per cui alla differenza iniziale **1** in ogni iterazione successiva **i** si somma 1 o 2 in base alla trasformazione corrispondente per cui $b_i - a_i = 1 + T_{1i} + 2*T_{2i}$.
Verifichiamo l'uguaglianza $b_i - a_i = T_{1i} + 2*T_{2i} = 21$ con **i=13** in base alla successione personalizzata nelle prime 13 iterazioni considerando le ultime 2 colonne della **Tabella 1** seguente dove il numero iniziale N=7359 è del tipo N ≡ 3 mod.4. Verifichiamo anche i valori di a_i e di b_i nella iterazione **i=13** (ultima riga) dove $\sum_1^i(p-1)$**=25** e quindi $b_1 = \sum_1^i(p-1) + 2* T_{1i} + 2*T_{2i} = 25+2*5+2*8 = 51$ ed $a_i = \sum_1^i(p-1) + T_{1i} = 25+5 = 30$.

Tabella 1

Iterazioni	N	periodicità p-1 del 2 nei numeri 4*h0+3	Dispari=a_i	Pari=b_i	Tipo di N e sua trasformazione successiva	4*h0+1-->3*h0+1 oppure 4*h0+3-->3*h1+1 =T_{1i}	4*h0+1-->h1 oppure 4*h0+3-->h1 =T_{2i}	$T_{1i}+2*T_{2i}$	b_i-a_i
	7359								
1	41917	5	6	7	4*h0+3-->3*h1+1	1	0	1	1
2	10479		6	9	4*h0+1-->h0	1	1	3	3
3	26527	3	10	14	4*h0+3-->3*h1+1	2	1	4	4
4	100723	4	15	20	4*h0+3-->3*h1+1	3	1	5	5
5	37771	1	16	23	4*h0+3-->h1	3	2	7	7
6	42493	1	18	26	4*h0+3-->3*h1+1	4	2	8	8
7	10623		18	28	4*h0+1-->h0	4	3	10	10
8	30253	6	24	36	4*h0+3-->h1	4	4	12	12
9	7563		24	38	4*h0+1-->h0	4	5	14	14
10	8509	1	26	41	4*h0+3-->3*h1+1	5	5	15	15
11	2127		26	43	4*h0+1-->h0	5	6	17	17
12	1795	3	29	48	4*h0+3-->h1	5	7	19	19
13	673	1	30	51	4*h0+3-->h1	5	8	21	21
	Totale=	25							

Ricapitolando si ha che in questa successione personalizzata sono vere le seguenti affermazioni:

i. la trasformazione dei numeri in ogni iterazione segue fedelmente solo uno dei 6 casi sopra descritti (a-b-c-d-e-f);
ii. sin dalla prima iterazione il totale dei passaggi pari (che indico con b_i) è sempre maggiore del totale dei passaggi dispari (che indico con a_i) cioè si ha $b_i > a_i$ e nelle iterazioni successive si ha che b_i aumenta più di a_i ;
iii. la differenza tra il totale dei passaggi pari ed il totale dei passaggi dispari aumenta sempre di 1 oppure di 2 unità in ogni iterazione e questo produce nelle iterazioni successive una differenza tra b_i e a_i che aumenta sempre;
iv. in ogni iterazione **i** si ha che la differenza tra b_i ed a_i (dove b_i è il totale dei passaggi pari ed a_i è il totale dei passaggi dispari in tutte le iterazioni precedenti compresa la iterazione considerata **i**) è sempre uguale $T_{1i} + 2*T_{2i}$ cioè $b_i - a_i = T_{1i} + 2*T_{2i}$ se N iniziale è dispari oppure è sempre uguale $b_i - a_i = p + T_{1i} + 2*T_{2i}$ se N iniziale è pari con $N = 2^p * (1 + 2 * k)$ oppure è sempre uguale $b_i - a_i = 1 + T_{1i} + 2*T_{2i}$ se N iniziale è pari con $N = 4 * k + 2$ e che con l'aumentare delle iterazioni cresce la differenza di $b_i - a_i$.

4 Esempio di successione di Collatz personalizzata.

Nella seguente **Tabella 2** come esempio vi è la successione del numero iniziale N=4*1839+3=7359 con il susseguirsi dei numeri dispari di tipo 3 e 4 dove nella colonna 1 vi è il numero delle iterazioni. Nella colonna 2 vi è la somma dei passaggi dispari totali con i passaggi pari totali fino alla iterazione appena eseguita. Nella colonna 3 vi è la successione del numero N. Nella colonna 4 il singolo numero indica p-1 cioè la molteplicità del 2 di N+1 diminuita di 1 quando il numero è di tipo 4 per cui ci sono p-1 numeri pari e p-1 numeri dispari

oppure il simbolo «0d2p» indica che il tipo 3 si trasforma in h_0 dispari per cui ci sono 2 numeri pari e 0 numeri dispari oppure il simbolo «1d2p» indica che il tipo 3 si trasforma in $3*h_0+1$ con h_0 pari per cui ci sono 2 numeri pari e 1 numeri dispari. Nella colonna 5 ci sono i valori di (1+2*k) nel caso che il numero è di tipo 4. Nella colonna 6 ci sono i valori k (per cui k è pari o dispari) nel caso che il numero è di tipo 4. Nella colonna 7 vi è il numero totale dei passaggi dispari e nella colonna 8 vi è il numero totale dei passaggi pari dall'inizio della successione. Nella colonna 9 vi sono i valori di h_0 iniziale del numero del tipo 3 oppure del tipo 4 oppure del solo h_0 dispari. Nella colonna 10 vi sono i valori di h_1 trasformato nella iterazione del numero del tipo 3 oppure del numero tipo 4 oppure del solo h_1 dispari. Nella colonna 11 vi è la trasformazione subita nella iterazione del numero in ingresso: "$4* h_0+1 \rightarrow 3* h_0+1$" indica che il tipo 3 si trasforma in $3* h_0+1$ mentre "$4* h_0+1 \rightarrow h_0$" indica che il tipo 3 si trasforma in h_0 in quanto dispari mentre "$4* h_0+3 \rightarrow 3* h_1+1$" indica che il tipo 4 si trasforma in $3* h_1+1$ mentre "$4* h_0+3 \rightarrow h_1$" indica che il tipo 4 si trasforma in h_1 in quanto dispari. Nella colonna 12 viene indicato il rapporto tra il totale dei passaggii dispari e quello dei passaggi pari nella iterazione. Nella colonna 13 il «SI» indica che il numero della successione trasformato è minore del numero iniziale N. Nella colonna 14 vi è il residuo in ogni iterazione e dove il residuo finale con cui N converge ad 1 è $\mathbf{Res_i}$ = **1,2497317.** Si nota che N=7359 scivola al numero 2127 alla iterazione 11 con passaggi totali (step) 69 di cui 26 passaggi dispari e 43 passaggi pari e converge ad 1 in 30 iterazioni con passaggi totali 145 di cui 51 passaggi dispari e 94 passaggi pari.

Tabella 2

step =Dispari + Pari	N	periodicità p-1 oppure numeri pari e dispari	Valore di w=1+2*k	k dispari o pari	Dispari	Pari	Valore di h0	Valore di h1	Tipo di N e sua trasformazione successiva	Media tra i dispari e pari	N'<N	Residuo per N-->1
	7359											
13	41917	5	115	57	6	7	1839	13972	4*h0+3-->3*h1+1	0,857142857		0,0000239
15	10479	0d2p			6	9	10479	10479	4*h0+1-->h0	0,666666667		0,0000954
24	26527	3	655	327	10	14	2619	8842	4*h0+3-->3*h1+1	0,714285714		0,0000377
35	100723	4	829	414	15	20	6631	33574	4*h0+3-->3*h1+1	0,75		0,0000099
39	37771	1	25181	12590	16	23	25180	37771	4*h0+3-->h1	0,695652174		0,0000265
44	42493	1	9443	4721	18	26	9442	14164	4*h0+3-->3*h1+1	0,692307692		0,0000235
46	10623	0d2p			18	28	10623	10623	4*h0+1-->h0	0,642857143		0,0000942
60	30253	6	83	41	24	36	2655	30253	4*h0+3-->h1	0,666666667		0,0000331
62	7563	0d2p			24	38	7563	7563	4*h0+1-->h0	0,631578947		0,0001323
67	8509	1	1891	945	26	41	1890	2836	4*h0+3-->3*h1+1	0,634146341		0,0001176
69	2127	0d2p			26	43	2127	2127	4*h0+1-->h0	0,604651163	SI	0,0004702
77	1795	3	133	66	29	48	531	1795	4*h0+3-->h1	0,604166667	SI	0,0005573
81	673	1	449	224	30	51	448	673	4*h0+3-->h1	0,588235294	SI	0,0014862
84	505	1d2p			31	53	168	168	4*h0+1-->3*h0+1	0,58490566	SI	0,0019816
87	379	1d2p			32	55	126	126	4*h0+1-->3*h0+1	0,581818182	SI	0,0026421
92	427	1	95	47	34	58	94	142	4*h0+3-->3*h1+1	0,586206897	SI	0,0023485
97	481	1	107	53	36	61	106	160	4*h0+3-->3*h1+1	0,590163934	SI	0,0020876
100	361	1d2p			37	63	120	120	4*h0+1-->3*h0+1	0,587301587	SI	0,0027835
103	271	1d2p			38	65	90	90	4*h0+1-->3*h0+1	0,584615385	SI	0,0037113
111	229	3	17	8	41	70	67	229	4*h0+3-->h1	0,585714286	SI	0,0043985
113	57	0d2p			41	72	57	57	4*h0+1-->h0	0,569444444	SI	0,0175942
116	43	1d2p			42	74	14	14	4*h0+1-->3*h0+1	0,567567568	SI	0,0234589
121	49	1	11	5	44	77	10	16	4*h0+3-->3*h1+1	0,571428571	SI	0,0208524
124	37	1d2p			45	79	12	12	4*h0+1-->3*h0+1	0,569620253	SI	0,0278032
126	9	0d2p			45	81	9	9	4*h0+1-->h0	0,555555556	SI	0,1112127
129	7	1d2p			46	83	2	2	4*h0+1-->3*h0+1	0,554216867	SI	0,1482836
136	13	2	1	0	49	87	1	4	4*h0+3-->3*h1+1	0,563218391	SI	0,0878718
138	3	0d2p			49	89	3	3	4*h0+1-->h0	0,550561798	SI	0,3514871
142	1	1	1	0	50	92	0	1	4*h0+3-->h1	0,543478261	SI	0,9372988
145		1d2p			51	94	0	0	4*h0+1-->3*h0+1	0,542553191	SI	1,2497317

Si nota che se nella colonna 11 vi è la trasformazione nell'iterazione "$4*h_0+1 \rightarrow 3*h_0+1$" il numero dei passaggi dispari aumenta di 1 unità mentre quello dei pari aumenta di 2 unità per cui la differenza tra passaggi pari e passaggi dispari aumenta di 1 unità; se vi è la trasformazione nell'iterazione "$4*h_0+1 \rightarrow h_0$" il numero dei passaggi dispari aumenta di 0 unità mentre quello dei pari aumenta di 2 unità per cui la differenza tra passaggi pari e passaggi dispari aumenta di 2 unità; se vi è la trasformazione nell'iterazione "$4*h_0+3 \rightarrow 3*h_1+1$" con p-1 nella 3 colonna il numero dei passaggi dispari aumenta di p unità mentre quello dei pari aumenta di p+1 unità per cui la differenza tra passaggi pari e passaggi dispari aumenta di 1 unità; infine se vi è la trasformazione nell'iterazione "$4*h_0+3 \rightarrow h_1$" con p-1 nella 3 colonna il numero dei passaggi dispari aumenta di p-1 unità mentre quello dei pari aumenta di p+1 unità per cui la differenza tra passaggi pari e passaggi dispari aumenta di 2 unità. Quindi è vero che in ogni iterazione **la differenza tra il totale dei passaggi pari (che indico con b_i) ed il totale dei passaggi dispari (che indico con a_i) aumenta sempre di 1 unità oppure di 2 unità nella iterazione successiva** e questo produce sempre nelle iterazioni successive una differenza tra b_i e a_i che aumenta sempre. Si nota anche che nella colonna 13 il rapporto tra i passaggi dispari ed i passaggi pari diminuisce in ogni iterazione se nella colonna 11 vi sono le due trasformazioni "$4*h_0+1 \rightarrow 3*h_0+1$" e "$4*h_0+1 \rightarrow h_0$" mentre aumenta se nella colonna 11 vi sono le due trasformazioni "$4*h_0+3 \rightarrow 3*h_1+1$" e "$4*h_0+3 \rightarrow h_1$". Quindi nella successione sono i numeri di tipo $4*h_0+3$ che allungano il tempo di arresto per convergere ad 1.

Nota 4.1 Nella seguente **Tabella 3** vi è la successione completa dello stesso numero iniziale N=7359 che converge ad 1 in cui sono state considerate alcune colonne della **Tabella 2** per poter verificare che in ogni

iterazione si ha che la differenza tra b_i ed a_i è sempre uguale $T_{1i}+2*T_{2i}$ cioé $b_i - a_i = T_{1i}+2*T_{2i}$. Inoltre si nota dall'ultima colonna che la **tendenza** dei valori di $b_i - a_i = T_{1i}+2*T_{2i}$ rispetto ai valori di a_i cresce con l'aumento delle iterazioni e nella iterazione numero 11 diventa maggiore del valore **m=0,5849625** che considereremo in seguito nel **Teorema 6.2**.

Tabella 3

Successione di Collatz usando numeri solo dispari N≡1 mod.4 e N≡3 mod.4						TOTALI--->	T_{1i}=17	T_{2i}=13	$T_{1i}+2*T_{2i}$=43		
Iterazioni	step =Dispari + Pari	N	Dispari =a	Pari =b	Tipo di N e sua trasformazione successiva	N'<N	4*h0+1-->3*h0+1 oppure 4*h0+3-->3*h1+1 =T_{1i}	4*h0+1-->h1 oppure 4*h0+3-->h1 =T_{2i}	$T_{1i}+2*T_{2i}$	pari - dispari = b-a	trend di T1i+2*T2i rispetto ad a_i
0	0	7359									
1	13	41917	6	7	4*h0+3-->3*h1+1		1	0	1	1	0,167
2	15	10479	6	9	4*h0+1-->h0		0	1	3	3	0,500
3	24	26527	10	14	4*h0+3-->3*h1+1		1	0	4	4	0,400
4	35	100723	15	20	4*h0+3-->3*h1+1		1	0	5	5	0,333
5	39	37771	16	23	4*h0+3-->h1		0	1	7	7	0,438
6	44	42493	18	26	4*h0+3-->3*h1+1		1	0	8	8	0,444
7	46	10623	18	28	4*h0+1-->h0		0	1	10	10	0,556
8	60	30253	24	36	4*h0+3-->h1		0	1	12	12	0,500
9	62	7563	24	38	4*h0+1-->h0		0	1	14	14	0,583
10	67	8509	26	41	4*h0+3-->3*h1+1		1	0	15	15	0,577
11	69	2127	26	43	4*h0+1-->h0	SI	0	1	17	17	0,654
12	77	1795	29	48	4*h0+3-->h1	SI	0	1	19	19	0,655
13	81	673	30	51	4*h0+3-->h1	SI	0	1	21	21	0,700
14	84	505	31	53	4*h0+1-->3*h0+1	SI	1	0	22	22	0,710
15	87	379	32	55	4*h0+1-->3*h0+1	SI	1	0	23	23	0,719
16	92	427	34	58	4*h0+3-->3*h1+1	SI	1	0	24	24	0,706
17	97	481	36	61	4*h0+3-->3*h1+1	SI	1	0	25	25	0,694
18	100	361	37	63	4*h0+1-->3*h0+1	SI	1	0	26	26	0,703
19	103	271	38	65	4*h0+1-->3*h0+1	SI	1	0	27	27	0,711
20	111	229	41	70	4*h0+3-->h1	SI	0	1	29	29	0,707
21	113	57	41	72	4*h0+1-->h0	SI	0	1	31	31	0,756
22	116	43	42	74	4*h0+1-->3*h0+1	SI	1	0	32	32	0,762
23	121	49	44	77	4*h0+3-->3*h1+1	SI	1	0	33	33	0,750
24	124	37	45	79	4*h0+1-->3*h0+1	SI	1	0	34	34	0,756
25	126	9	45	81	4*h0+1-->h0	SI	0	1	36	36	0,800
26	129	7	46	83	4*h0+1-->3*h0+1	SI	1	0	37	37	0,804
27	136	13	49	87	4*h0+3-->3*h1+1	SI	1	0	38	38	0,776
28	138	3	49	89	4*h0+1-->h0	SI	0	1	40	40	0,816
29	142	1	50	92	4*h0+3-->h1	SI	0	1	42	42	0,840
30	145		51	94	4*h0+1-->3*h0+1	SI	1	0	43	43	0,843

Nella seguente **Tabella 4** vi è la successione dello stesso numero iniziale N=4*1839+3=7359 adottando la successione di Collatz **canonica** usando passaggi doppi (cioè f(N)=(3*N+1)/2) dove nella colonna 1 vi è il numero complessivo dei passaggi, nella colonna 2 i valori trasformati di N, nella colonna 3 il totale dei passaggi dispari e nella colonna 4 il totale dei passaggi pari. Si nota che le due successioni delle Tabelle 2 e 4 portano a convergere ad 1 con gli stessi passaggi totali (145), con gli stessi passaggi dispari (51) e pari (94) per cui sono equivalenti. Si nota anche che tutti i valori di N nella successione della **Tabella 4** risultano anche nei valori di N nella successione della **Tabella 2** ad eccezione dei numeri pari e delle trasformazioni "$4*h_0+1 \rightarrow h_0$" e "$4*h_0+3 \rightarrow h_1$" per "cambio orbita".

Tabella 4

Successione di Collatz canonica			
step	N	Dispari	Pari
0	7359	0	0
2	11039	1	1
4	16559	2	2
6	24839	3	3
8	37259	4	4
10	55889	5	5
12	83834	6	6
13	41917	6	7
15	62876	7	8
16	31438	7	9
17	15719	7	10
19	23579	8	11
21	35369	9	12
23	53054	10	13
24	26527	10	14
26	39791	11	15
28	59687	12	16
30	89531	13	17
32	134297	14	18
34	201446	15	19
35	100723	15	20
37	151085	16	21
39	226628	17	22

Continua

Successione di Collatz canonica			
step	N	Dispari	Pari
40	113314	17	23
41	56657	17	24
43	84986	18	25
44	42493	18	26
46	63740	19	27
47	31870	19	28
48	15935	19	29
50	23903	20	30
52	35855	21	31
54	53783	22	32
56	80675	23	33
58	121013	24	34
60	181520	25	35
61	90760	25	36
62	45380	25	37
63	22690	25	38
64	11345	25	39
66	17018	26	40
67	8509	26	41
69	12764	27	42
70	6382	27	43
71	3191	27	44
73	4787	28	45
75	7181	29	46

Continua

Successione di Collatz canonica			
step	N	Dispari	Pari
77	10772	30	47
78	5386	30	48
79	2693	30	49
81	4040	31	50
82	2020	31	51
83	1010	31	52
84	505	31	53
86	758	32	54
87	379	32	55
89	569	33	56
91	854	34	57
92	427	34	58
94	641	35	59
96	962	36	60
97	481	36	61
99	722	37	62
100	361	37	63
102	542	38	64
103	271	38	65
105	407	39	66
107	611	40	67
109	917	41	68
111	1376	42	69
112	688	42	70

Continua

Successione di Collatz canonica			
step	N	Dispari	Pari
113	344	42	71
114	172	42	72
115	86	42	73
116	43	42	74
118	65	43	75
120	98	44	76
121	49	44	77
123	74	45	78
124	37	45	79
126	56	46	80
127	28	46	81
128	14	46	82
129	7	46	83
131	11	47	84
133	17	48	85
135	26	49	86
136	13	49	87
138	20	50	88
139	10	50	89
140	5	50	90
142	8	51	91
143	4	51	92
144	2	51	93
145	1	51	94

5 Numeri N=4*h0 + 3 cioè N ≡ 3 mod.4

Considerazione importante 5.1: Il numero N=4*h_0+3 è dispari per cui il suo successivo è pari e quindi è divisibile per 2 ed indichiamo con p la sua molteplicità per il 2 , cioè, poniamo $\boldsymbol{N+1=2^p*(1+2*k)}$ con **p>=2** e **k≥0** interi positivi e quindi $\boldsymbol{N=2^p*(1+2*k)-1}$. Per esempio, se **p=10** si ha $\boldsymbol{N=2^{10}*(1+2*k)-1=2048*k+1023}$. È importante sapere quanti sono gli N=4*h_0+3 che portano ad una certa molteplicità p per il 2 di N+1 poiché sono gli N del tipo 4 che fanno aumentare nella successione il numero successivo. I numeri del tipo **N=4*h_0+3** hanno periodicità **p** se $\boldsymbol{h_0=2^{(p-2)}-1+2^{(p-1)}*k}$ per ogni **p≥2** e **k≥0** numeri interi. Dalla **Tabella 5** seguente, risulta quanti sono e quali sono i valori di $\mathbf{h_0}$ e dei rispettivi **N** che portano ad una certa molteplicità **p** in un gruppo di numeri da 0 a $\boldsymbol{2^{20}-1=1.048.575}$ e dove i numeri di tipo N ≡ 3 mod.4 sono ¼ di tutti i 1.048.576 considerati. (I numeri N ≡ 0 mod.4 sono ¼ di tutti i 1.048.576 considerati, i numeri N ≡ 2 mod.4 sono ¼ di tutti i 1.048.576 considerati, i numeri N ≡ 1 mod.4 sono ¼ di tutti i 1.048.576 considerati).

Tabella 5

p=	h_0=	N[0]=	Quanti su 1.048.576 numeri	Valori di k	In percentuale su 1048576 numeri
2	h_0=0+2*k	N[0]=3+8*k	131.072	0<=k<=131.071	12,5000000%
3	h_0=1+4*k	N[0]=7+16*k	65.536	0<=k<=65.535	6,2500000%
4	h_0=3+8*k	N[0]=15+32*k	32.768	0<=k<=32.767	3,1250000%
5	h_0=7+16*k	N[0]=31+64*k	16.384	0<=k<=16.383	1,5625000%
6	h_0=15+32*k	N[0]=63+128*k	8.192	0<=k<=8.191	0,7812500%
7	h_0=31+64*k	N[0]=127+256*k	4.096	0<=k<=4.095	0,3906250%
8	h_0=63+128*k	N[0]=255+512*k	2.048	0<=k<=2.047	0,1953125%
9	h_0=127+256*k	N[0]=511+1024*k	1.024	0<=k<=1.023	0,0976563%
10	h_0=255+512*k	N[0]=1023+2048*k	512	0<=k<=511	0,0488281%
11	h_0=511+1024*k	N[0]=2047+4096*k	256	0<=k<=255	0,0244141%
12	h_0=1023+2048*k	N[0]=4095+8192*k	128	0<=k<=127	0,0122070%
13	h_0=2047+4096*k	N[0]=8191+16384*k	64	0<=k<=63	0,0061035%
14	h_0=4095+8192*k	N[0]=16383+32768*k	32	0<=k<=31	0,0030518%
15	h_0=8191+16384*k	N[0]=32767+65536*k	16	0<=k<=15	0,0015259%
16	h_0=16383+32768*k	N[0]=65535+131072*k	8	0<=k<=7	0,0007629%
17	h_0=32767+65536*k	N[0]=131071+262144*k	4	0<=k<=3	0,0003815%
18	h_0=65535+131072*k	N[0]=262143+524288*k	2	0<=k<=1	0,0001907%
19	h_0=131071+262144*k	N[0]=524287+1048576*k	1	k=0	0,0000954%
20	h_0=262143+524288*k	N[0]=1048575+2097152*k	1	k=0	0,0000954%
		Totale=	262.144	Totale=	25,0000000%

Ricordiamo che per qualunque valore di p il numero N ≡ 3 mod.4 produce nella iterazione un aumento di passaggi dispari di **p-1** (caso 5 dell'introduzione) **oppure di p** (caso 6 dell'introduzione) mentre produce nella stessa iterazione sempre un aumento di passaggi pari di **p+1** per un aumento della differenza ***b-a*=2 oppure *b-a*=1** per cui per ogni gruppo di N ≡ 3 mod.4 avente lo stesso p si avrà che ½ di essi si inseriscono nel caso 5 dell'introduzione e ½ di essi si inseriscono nel caso 6 dell'introduzione .
Si nota che le probabilità di avere un valore di p molto alto sono minime e che i numeri con molteplicità **p=2** sono la metà dei 262.144 numeri di tipo 4 del gruppo considerato (cioè 131.072 di cui 65.536 nel caso 5 dell'introduzione e 65.536 nel caso 6 dell'introduzione) e che i numeri con molteplicità **p** con **2<=p<=4** del caso 5 dell'introduzione sono il **10,9375% su il 25%** del totale nella successione personalizzata.

6 Dimostrazione della congettura di Collatz.

Nota 6.1. Consideriamo il numero N=4* h_0 +3 dispari e sappiamo che durante la successione personalizzata i numeri sono dispari del tipo 3 oppure del tipo 4 e che nella successione personalizzata la differenza tra il totale dei passaggi pari (che indico con ***b***) ed il totale dei passaggi

dispari (che indico con ***a)*** aumenta sempre di 1 oppure di 2 unità in ogni iterazione per cui il valore di ***b*** cresce più del valore di ***a*****.** Quindi con il susseguirsi delle iterazioni si ha che in una iterazione **i** il valore del numero N iniziale trasformato **si avvicina** ad $N' = (3^{a_i} * N)/2^{b_i}$ ed esso può essere maggiore o minore del numero iniziale N. La condizione per cui N'<N si ha quando $N' = (3^{a_i} * N)/2^{b_i}$**<N** e cioè semplificando per N si ha $3^{a_i}/2^{b_i}$**<1** e passando al logaritmo si ha $a_i * log(3) - b_i * log(2) < 0$ e cioè $a_i < b_i * log(2)/log(3)$ cioè a_i/b_i **< 0,6309.** Inoltre dalle precedenti disuguaglianze si hanno anche le seguenti disuguaglianze $b_i > a_i$***1,5849625** e $b_i - a_i > a_i$***0,5849625** equivalenti alla precedente**.**

Teorema n.6.1 Per ogni numero dispari del tipo 4, N=4*h_0+3, nella successione esiste almeno una iterazione in cui il numero iniziale N si trasforma in un numero N' minore di N e quindi ad esso isopath.
Dimostrazione. Consideriamo il numero N=4*h_0+3 dispari e sappiamo dalla **Nota 6.1** che durante la successione personalizzata i numeri sono dispari del tipo 3 oppure del tipo 4 e che nella successione personalizzata essi si trasformano in base ai passaggi dispari ed ai passaggi pari e che poiché l'aumento dei passaggi pari è maggiore di quello dei passaggi dispari si ha che esiste almeno una iterazione **i** in cui a_i/b_i **< 0,6309** e quindi il valore del numero **N** iniziale si trasforma in **N'** ed esso è minore del numero iniziale N e quindi ad esso isopath. **c.v.d.**

In effetti nella **Tabella 2** precedente si ha che all'iterazione 11 con dispari a_{11}=26 e pari b_{11}=43 si ha N'=2127< N=7359 e a_{11}/b_{11}**= 0,604651163< 0,6309297**. Inoltre si ha anche **43=**$b_{11} > a_{11}$***1,5849625=41,209** e **17=** $b_i - a_i > a_i$***0,5849625=15,209.**

Nota 6.2. Si può verificare inoltre che dopo il numero trasformato N'<N si ottengono sempre numeri M'dispari minori del numero iniziale N tali che **M'<N'<N** e questo si ha sempre se i numeri successivi ad N' sono ≡ 1 mod.4 poiché in essi i passaggi pari aumentano di 2 unità ed i dispari aumentano di 0 oppure 1 unità in base ai casi 3 e 4 dell'introduzione. In effetti se abbiamo $b_i > a_i$***1,5849625** e quindi **N'<N** con **N'≡ 1 mod.4** per cui nella iterazione successiva **i+1** si ha $b_{i+1}=b_i$**+2** e $a_{i+1}=a_i$**+0** oppure $b_{i+1}=b_i$**+2** e $a_{i+1}=a_i$**+1** si ha ancora $b_{i+1} > a_{i+1}$***1,5849625** ($b_{i+1}=b_i$**+2>(**a_i**+0)***1,5849625=** a_i***1,5849625** oppure $b_{i+1}=b_i$**+2>(**a_i**+1)***1,5849625=** a_i***1,5849625+1,5849625**) per cui il numero **M'** ottenuto sarà minore di **N'<N**.
Se invece **N'≡ 3 mod.4** nella iterazione successiva **i+1** in base al caso 5 dell'introduzione dove **p>=2** si ha $b_{i+1}=b_i$**+p+1** e $a_{i+1}=a_i$**+p-1** per cui $b_{i+1}=b_i$**+p+1>(**a_i**+p-1)***1,5849625=a_i***1,5849625+p*1,5849625-1,5849625** e quindi b_i**+p+1>**a_i***1,5849625+p*1,5849625-1,5849625** la quale è verificata se **p+1>=p*1,5849625-1,5849625** e cioè se **p<= 4,419** dove essendo **p** intero si ha **2<=p<=4**.
Se invece **N'≡ 3 mod.4** nella iterazione successiva **i+1** in base al caso 6 dove **p>=2** dell'introduzione si ha $b_{i+1}=b_i$**+p+1** e $a_{i+1}=a_i$**+p** per cui $b_{i+1}=b_i$**+p+1>(**a_i**+p)***1,5849625=a_i***1,5849625+p*1,5849625** e quindi b_i**+p+1>**a_i***1,5849625+p*1,5849625** la quale è verificata se **p+1>=p*1,5849625** da cui **p<=1,709** e questo è impossibile perché **p>=2** per cui la disuguaglianza $b_{i+1} > a_{i+i}$***1,5849625** non è vera e quindi il numero **M'** successivo di **N'** nella successione sarà **M'>N'** e quindi anche **M'>N.**
In conclusione, se nell'iterazione **i** si ha il numero **N'<N** ed **N'≡ 1 mod.4** oppure **N'≡ 3 mod.4** del caso 5 con **2<=p<=4** si ottiene nella iterazione successiva **i+1** un numero **M'** minore di N' e di N e questa situazione se si ripete ancora nelle iterazioni successive porta sempre a far aumentare la differenza tra i passaggi pari e quelli dispari avvicinando sempre più il numero N iniziale della successione ad 1. Se invece nell'iterazione **i** si ha il numero **N'<N** ed **N'≡ 3 mod.4** del caso 5 con **p>=5 oppure N'≡ 3 mod.4** del caso 6 con p>=2 si ottiene nella iterazione successiva **i+1** il numero **M'** che ritorna ad essere **M'>N'** e quindi anche **M'>N** perché non è soddisfatta la relazione $b_{i+1} > a_{i+1}$***1,5849625.** Però in questo caso la differenza tra i passaggi pari e quelli dispari è aumentata di 1 oppure di 2 unità ed i valori di b_{i+1} sono aumentati di 1 oppure di 2 unità rispetto all'aumento dei valori di a_{i+1} per cui riapplicando più volte il **Teorema n.6.1** si continuerà ad ottenere che la differenza tra il totale dei passaggi pari ed il totale dei passaggi dispari aumenta sempre di 1 oppure di 2 unità. Inoltre si ha dalla Tabella 5 che i numeri **N'≡ 1 mod.4** e **N'≡ 3 mod.4** del caso 5 con **2<=p<=4** che fanno diminuire ancora il valore del numero **N**' nella successione sono il **25% + 10,9375% = 35,9375%** di tutti i numeri dispari (i numeri dispari sono il **50%**) compresi tra **0** e $2^n - 1$ **per ogni n intero positivo** per cui la probabilità di incorrere nella successione in un numero dispari **N'≡ 3 mod.4 del caso 5 con p>=5** e **del caso 6 con p>=2 è bassa** (**14,0625% sul 50% di tutti i numeri dispari**) per cui il valore di ***b*** cresce più del valore di ***a*** e questo fa diminuire il valore di N' in ogni iterazione per cui esso converge sempre più ad 1.

Corollario teorema 6.1: Per ogni numero N del tipo 1, del tipo 2 e del tipo 3 esiste una iterazione in cui il numero iniziale N si trasforma in un numero N' minore di N e quindi ad esso isopath.
Dimostrazione. Se N=4*h_0 è del tipo 1 essendo un numero pari può essere diviso per 2 e quindi se la sua molteplicità rispetto a 2 è p possiamo scriverlo $N[0] = 2^p * w$ con **p>=2** ed **w intero dispari** e quindi per la

successione di Collatz dopo p passaggi singoli, in cui si divide p volte per 2, si ha il numero **N[p]=w** dispari e quindi un numero minore del numero iniziale N=4*h_0 con b_1=p passaggi pari e nessun passaggio dispari cioè con b_1=p ed a_1=0 per cui risulta soddisfatta la relazione a_1/b_1**< 0,6309297 cioè 0/p=0<0,6309297 con passaggi t=**a_1+b_1**=p**. Se $N = 4 * h_0 + 2 = 2(2 * h_0 + 1)$ del tipo 2 essendo un numero pari per la successione di Collatz dopo il primo passaggio, in cui si divide per 2, porta al numero $N[1] = 2 * h_0 + 1$ dispari e quindi ad un numero minore del numero iniziale $N[0] = 4 * h_0 + 2$ con 1 passaggi pari e nessun passaggio dispari cioè con b_1=1 ed a_1=0 per cui risulta soddisfatta la relazione a_1/b_1**< 0,6309297 cioè 0/1=0<0,6309297 con passaggi t=** a_1+b_1**=1**. Se infine $N = 4 * h_0 + 1$ del tipo 3 essendo un numero dispari per la successione di Collatz dopo il primo passaggio doppio diventa $N[2] = (3 * (4 * h_0 + 1) + 1)/2 = 6 * h_0 + 2$ e poiché è pari nel passaggio successivo si divide per 2 e diventa $N[3] = 3 * h_0 + 1$. Quindi se h_0 è pari allora N[3] è dispari ed è minore del numero iniziale N=4*h_0+1 con 2 passaggi pari ed 1 passaggio dispari cioè con b_1=2 ed a_1=1 per cui risulta soddisfatta la relazione a_1/b_1**< 0,6309297 cioè 1/2=0,5<0,6309297 con passaggi t=** a_1+b_1**=3,** mentre se **h_0 è dispari N[3]=h_0 (cambio orbita)** è numero dispari minore del numero iniziale N=4*h_0+1 con 2 passaggi pari ed 0 passaggio dispari cioè con b_1=2 ed a_1=0 per cui risulta soddisfatta la relazione a_1/b_1**< 0,6309297 cioè 0/2=0<0,6309297 con passaggi t=** a_1+b_1**=2. c.v.d.**

Quindi tutti i 4 tipi di numeri N mod.4 quando la condizione a_i/b_i**< 0,6309297** (con a_i totale passaggi dispari e b_i totale passaggi pari) è verificata si trasforma in un numero N' minore di N e quindi ad esso isopath. Il teorema n.6.1 si può definire il teorema dello «scivolo».

<u>Teorema n.6.2</u> Ogni numero dispari del tipo 4 cioè N[0]=4* h_0+3 soddisfa la congettura di Collatz.
<u>Dimostrazione.</u> Il numero N=4*h_0 +3 è dispari e dal **<u>Teorema n. 6.1</u>** sappiamo che scivola in una iterazione **i** con passaggi **t=**b_i+a_i con a_i passaggi totali dispari e con b_i passaggi totali pari tali che a_i/b_i**< 0,6309297**. Continuando la successione, in base alle diverse situazioni che si susseguono, il valore di b_i cresce sempre rispetto al valore di a_i (sappiamo che la loro differenza cresce di 1 oppure di 2 unità per ogni iterazione e per la **<u>Nota 6.2</u>** la probabilità che il numero N nella successione dopo lo scivolo aumenti è bassa). Il susseguirsi dei numeri dispari trasformati in ogni iterazione dipendono dai valori di a_i e b_i con b_i che aumenta sempre rispetto ad a_i per cui in una determinata iterazione **s** si ottiene un valore di b_s ed il valore corrispondente di a_s con $b_s>a_s$ tale che si ha $\frac{3^{a_s} * N}{2^{b_s}} < 1$. Passando al logaritmo della disuguaglianza si ha $a_s * \log(3) - b_s * \log(2) + \log(N) < 0$ da cui $b_s > a_s * \frac{\log(3)}{\log(2)} + \frac{\log(N)}{\log(2)}$ e da questo consegue che $b_s - a_s > a_s * 0.5849625 + \frac{\log(N)}{\log(2)}$ da cui essendo sia b_s-a_s che b_s interi si ha $b_s = ARR.ECC\left[a_s * \frac{log(3)}{log(2)} + \frac{log(N)}{log(2)}\right]$ *e* $b_s - a_s = ARR.ECC.\left[a_s * 0,5849625 + \frac{\log(N)}{\log(2)}\right]$ (si arrotondano b_s-a_s e b_s all'intero successivo). Quindi il valore b_s-a_s tende ad aumentare rispetto al valore di a_s seguendo l'andamento di una retta crescente di coefficiente angolare **m=0,5849625** e di punto iniziale $Q\left(0; \frac{log(N)}{log(2)}\right)$ con $\frac{log(N)}{log(2)} > 2$ e quindi posso considerare in un piano cartesiano (con asse x i valori di a_i e con asse y i valori di b_i-a_i) la funzione **f:N→N** dove **f(**a_i**)=** $ARR.ECC.\left[a_i * 0,5849625 + \frac{\log(N)}{\log(2)}\right]$**=** b_i-a_i che ha un andamento simile alla retta crescente $y = a_i * 0,5849625 + \frac{log(N)}{log(2)}$ di coefficiente angolare **m=0,5849625** in cui il valore di y si arrotonda al numero intero successivo. Inoltre ricordiamo dalla **<u>Nota 3.1</u>** e dalla **Tabella 1** del **paragrafo 3** e dalle **Tabelle 2** e **3** e **<u>Nota 4.1</u>** del **paragrafo 4** che in ogni iterazione **i** la differenza b_i-a_i è uguale a T_{1i} **+2*T_{2i}** il cui valore dipende dal valore di a_i ed aumenta sempre con l'aumentare delle iterazioni con una tendenza che diventa **maggiore di m=0,5849625** per cui tende ad incontrarsi con la retta della funzione **f(**a_i**)** per un determinato valore di a_i**.** Quindi si avrà in una iterazione **s** tale che T_{1s} **+2*T_{2s}=** b_s-a_s**=** $ARR.ECC.\left[a_s * 0,5849625 + \frac{\log(N)}{\log(2)}\right]$**=** **f(**$a_s$**)** per cui in questa iterazione **s** il valore di **N** iniziale è positivo ed è minore di **1** per cui $(3^{a_s} * N * Res)/(2^{b_s}) = 1$**.** Inoltre in tutte le iterazioni successive ad **s** si avrà che per ogni **i** intero positivo b_{s+i} **-** a_{s+i} **=1** dove b_{s+i} aumenta di 2 unità ed a_{s+i} aumenta di 1 unità in tutte le iterazioni **s+i** successive ad **s.** Quindi ogni numero dispari del tipo 4 cioè N[0]=4* h_0+3 soddisfa la congettura di Collatz. **c.v.d.**

<u>Teorema n.6.3</u> Ogni numero pari del tipo 1 e del tipo 2 ed ogni numero dispari del tipo 3 soddisfa la congettura di Collatz.
<u>Dimostrazione.</u> Il numero tipo 3 N[0]=4* h_0 +1 è dispari e per il **corollario al Teorema n.6.1** scivola in un numero N' dispari che continua la sua successione nello stesso modo del numero tipo 4 (dopo il primo passaggio) e quindi per il **Teorema n.6.2** allo stesso modo soddisfa la congettura. Il numero tipo 1 N[0]=4* h_0 +0 è pari e per il **corollario al Teorema n.6.1** scivola in un numero N' dispari e quindi continuerà la sua

successione nello stesso modo che abbiamo visto prima e quindi per il **Teorema n.6.2** allo stesso modo soddisfa la congettura.Il numero tipo 2 N[0]=4* h_0 +2 è pari e per il **corollario al Teorema n.6.1** scivola in un numero N' dispari e continua la sua successione nello stesso modo che abbiamo visto prima e quindi per il **Teorema n.6.2** allo stesso modo soddisfa la congettura**. C.v.d.**

<u>Corollario teorema n.6.2 e n.6.3</u> Ogni numero N mod.4 continua la successione dopo la convergenza ad 1 (per i Teoremi n.6.2 e n.6.3) con il ciclo 1 – 4 – 2 – 1.

<u>Dimostrazione.</u> Dai **Teoremi n.6.2 e n.6.3** si ha che N converge ad 1 perché esiste il numero di passaggi dispari a_s ed esiste un numero di passaggi pari $b_s = ARR.ECC\left[a_s * \frac{log(3)}{log(2)} + \frac{log(N)}{log(2)}\right]$ per cui b_s-a_s= $ARR.ECC.\left[a_s * 0,5849625 + \frac{\log(N)}{\log(2)}\right] = T_{1s} + 2 * T_{2s}$. Il ciclo 1 – 4 – 2 – 1 successivo si ottiene con un passaggio dispari seguito da 2 passaggi pari per cui il valore di $a_{s+1}=a_s$ **+1** e $b_{s+1}=b_s$ **+2.** Calcoliamo $b_{s+1} = ARR.ECC.\left[(a_{s+1}) * \frac{\log(3)}{\log(2)} + \frac{\log(N)}{\log(2)}\right]$=$ARR.ECC.\left[a_s * \frac{\log(3)}{\log(2)} + \frac{\log(N)}{\log(2)}\right]$+$ARR.ECC.\left[\frac{\log(3)}{\log(2)}\right] = b_s + 2$ dove $b_s = ARR.ECC\left[a_s * \frac{log(3)}{log(2)} + \frac{log(N)}{log(2)}\right]$ e $ARR.ECC.[log(3)/log(2)] = 2$ per cui $b_{s+1}= b_s$**+2** e questo vale per ogni ciclo 1 – 4 – 2 – 1 successivo. **C.v.d.**

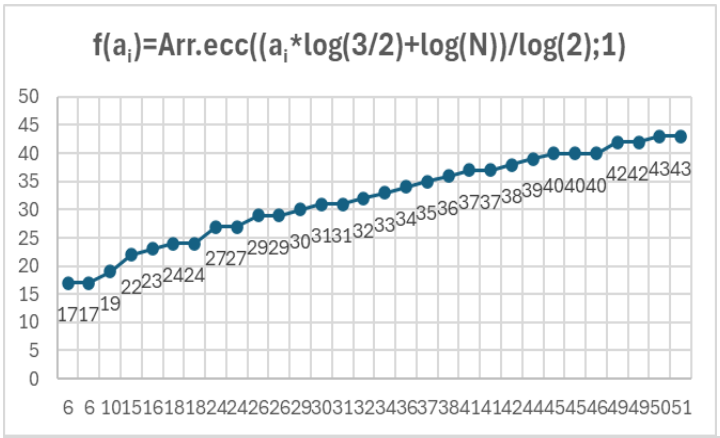
Possiamo verificare il **Teorema 6.2** precedente usando la **Tabella 6** seguente (anche la **Tabella 2** precedente) dove per ogni iterazione **i** sono stati inseriti nelle rispettive colonne i valori di a_i, i valori corrispondenti di $b_i = ARR.ECC\left[a_i * \frac{log(3)}{log(2)} + \frac{log(N)}{log(2)}\right]$ e i valori delle funzioni **y= a_i*0,5849625+log(N)/log(2), y= f(a_i)= ARR.ECC**.$[a_i * 0,5849625 + log(N)/log(2)]$ ed i valori di T_{1i} **+2***T_{2i}.

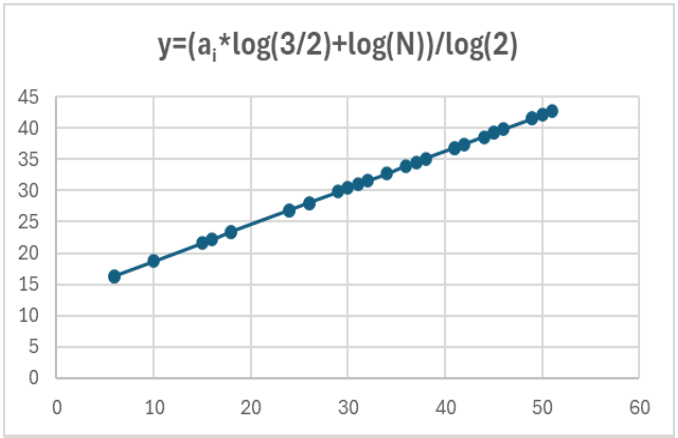
Tabella 6

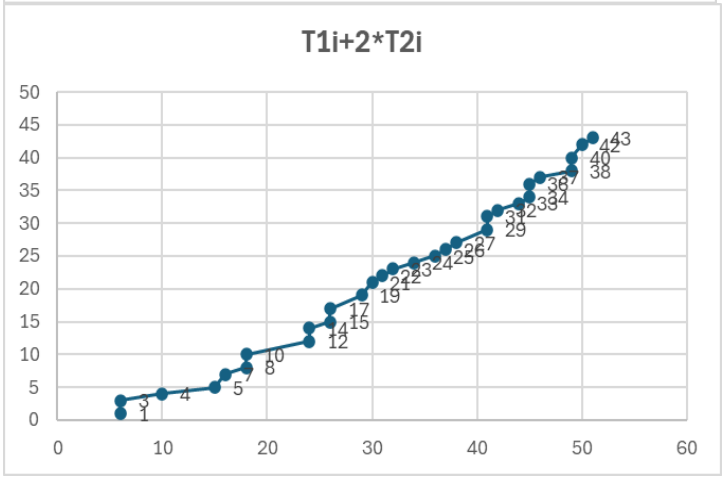
Successione di Collatz usando numeri solo dispari N≡1 mod.4 e N≡3 mod.4						TOTALI--->	T_{1i}=17	T_{2i}=13	T_{1i}+2*T_{2i}=43				
Iterazioni	step =Dispari + Pari	N	Dispari=a	Pari=b	Tipo di N e sua trasformazione successiva	N'<N	4*h0+1-->3*h0+1 oppure 4*h0+3-->3*h1+1 =T_{1i}	4*h0+1-->h1 oppure 4*h0+3-->h1 =T_{2i}	T_{1i}+2*T_{2i}	Step pari -step dispari = b-a	y=(a_i*log(3/2)+log(N))/log(2)	f(a_i)=Arr.ecc(((a_i*log(3/2)+log(N))/log(2);1)	Verifica T_{1i}+T_{2i}=Arr.ecc.(((a_i*log(3/2)+log(N))/log(2);1)
0	0	7359											
1	13	41917	6	7	4*h0+3-->3*h1+1		1	0	1	1	16,35506902	17	NO
2	15	10479	6	9	4*h0+1-->h0		1	1	3	3	16,35506902	17	NO
3	24	26527	10	14	4*h0+3-->3*h1+1		2	1	4	4	18,69491903	19	NO
4	35	100723	15	20	4*h0+3-->3*h1+1		3	1	5	5	21,61973153	22	NO
5	39	37771	16	23	4*h0+3-->h1		3	2	7	7	22,20469403	23	NO
6	44	42493	18	26	4*h0+3-->3*h1+1		4	2	8	8	23,37461903	24	NO
7	46	10623	18	28	4*h0+1-->h0		4	3	10	10	23,37461903	24	NO
8	60	30253	24	36	4*h0+3-->h1		4	4	12	12	26,88439404	27	NO
9	62	7563	24	38	4*h0+1-->h0		4	5	14	14	26,88439404	27	NO
10	67	8509	26	41	4*h0+3-->3*h1+1		5	5	15	15	28,05431904	29	NO
11	69	2127	26	43	4*h0+1-->h0	SI	5	6	17	17	28,05431904	29	NO
12	77	1795	29	48	4*h0+3-->h1	SI	5	7	19	19	29,80920654	30	NO
13	81	673	30	51	4*h0+3-->h1	SI	5	8	21	21	30,39416904	31	NO
14	84	505	31	53	4*h0+1-->3*h0+1	SI	6	8	22	22	30,97913154	31	NO
15	87	379	32	55	4*h0+1-->3*h0+1	SI	7	8	23	23	31,56409404	32	NO
16	92	427	34	58	4*h0+3-->3*h1+1	SI	8	8	24	24	32,73401904	33	NO
17	97	481	36	61	4*h0+3-->3*h1+1	SI	9	8	25	25	33,90394405	34	NO
18	100	361	37	63	4*h0+1-->3*h0+1	SI	10	8	26	26	34,48890655	35	NO
19	103	271	38	65	4*h0+1-->3*h0+1	SI	11	8	27	27	35,07386905	36	NO
20	111	229	41	70	4*h0+3-->h1	SI	11	9	29	29	36,82875655	37	NO
21	113	57	41	72	4*h0+1-->h0	SI	11	10	31	31	36,82875655	37	NO
22	116	43	42	74	4*h0+1-->3*h0+1	SI	12	10	32	32	37,41371905	38	NO
23	121	49	44	77	4*h0+3-->3*h1+1	SI	13	10	33	33	38,58364405	39	NO
24	124	37	45	79	4*h0+1-->3*h0+1	SI	14	10	34	34	39,16860655	40	NO
25	126	9	45	81	4*h0+1-->h0	SI	14	11	36	36	39,16860655	40	NO
26	129	7	46	83	4*h0+1-->3*h0+1	SI	15	11	37	37	39,75356905	40	NO
27	136	13	49	87	4*h0+3-->3*h1+1	SI	16	11	38	38	41,50845655	42	NO
28	138	3	49	89	4*h0+1-->h0	SI	16	12	40	40	41,50845655	42	NO
29	142	1	50	92	4*h0+3-->h1	SI	16	13	42	42	42,09341906	43	NO
30	145		51	94	4*h0+1-->3*h0+1	SI	17	13	43	43	42,67838156	43	SI

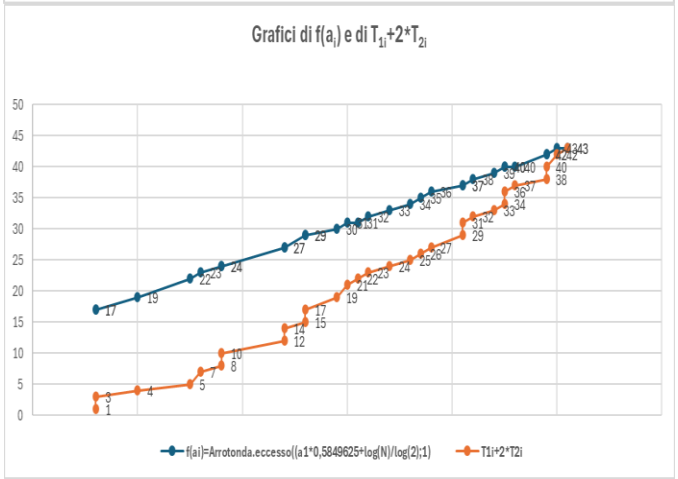
In effetti dalla **Tabella 2** e dalla **Tabella 6** si ha alla iterazione **s=30** con passaggi totali a_s+b_s **=145** (passaggi dispari a_s **=51** e pari b_s**=94**) si ha **N[145]=1** e si verifica che b_s**=ARR.ECC.[*51** 1,5849625+log(N)/log(2)]=94** e si ha che a_s+b_s **=ARR.ECC.[*51** 2,5849625+log(N)/log(2)]=145** e si ha anche b_s-a_s = **f(a_s)= ARR.ECC.[*51**0,5849625+log(N)/log(2)]= T_{1i} +2*T_{2i} = 43**. Questo risultato si ottiene solo nell'ultima iterazione della **Tabella 6**. In effetti se consideriamo l'iterazione **i=23** con a_{23} **=44** e b_{23} **=77** si ha che b_{23}-a_{23} **= ARR.ECC.[*44**0,5849625+log(N)/log(2)]=39** diverso da **33= 77-44**. Quindi il numero iniziale N=7359 converge ad 1 con passaggi (step) totali a_s+b_s**=145** per cui la congettura è verificata.

Possiamo anche verificare il **Teorema 6.2** precedente usando dei diagrammi cartesiani ponendo sull'asse delle ascisse i valori dei passaggi dispari a_i (colonna 4 della Tabella 6) e sull'asse delle ordinate i valori T_{1i} **+2***T_{2i} , i valori b_i-a_i delle differenze tra passaggi pari e passaggi dispari delle funzioni **y= a_i*0,5849625+log(N)/log(2), y= f(a_i)= ARR.ECC.[a_i*0,5849625+log(N)/log(2)]** (colonne 10 - 11 - 12 - 13 della Tabella 6)**.**









Dall'ultimo diagramma si nota come i grafici di **f(a_i)** ed i valori **T_{1i} +2*T_{2i}** si incontrano nel punto in cui con passaggi dispari ***a_s* =51** e pari ***b_s* =94** il numero iniziale **N soddisfa la congettura.**
Sono stati svolte molte prove su numeri diversi contenenti anche un numero di cifre numerose usando un programma in python di mia creazione con numeri aventi moltissime cifre che hanno confermato la veridicità della congettura.

Conclusioni

Se si inizia la successione con un numero pari ≡ 0 mod.4 oppure ≡ 2 mod.4 per i casi 1. e 2. dell'introduzione si avrà nella iterazione successiva un numero dispari ≡ 1 mod.4 oppure ≡ 3 mod.4 che chiamerò N1 e sarà del tipo N1=4*w+1 oppure N1=4*w+3 e quindi si procederà nelle iterazioni successive con numeri sempre dispari ≡ 1 mod.4 oppure ≡ 3 mod.4 seguendo i casi 3. - 4. - 5. - 6. della introduzione. La differenza tra il totale *b* dei passaggi pari ed il totale *a* dei passaggi dispari aumenta sempre di 1 oppure di 2 unità per ogni iterazione e questo produce nelle iterazioni successive una differenza tra *b* e *a* che aumenta sempre per cui si ha che, in una determinata iterazione successiva **i** con totali passaggi pari di ***b_i*** e con totali passaggi dispari di ***a_i*,** legati tra di loro dalla relazione ***a_i/b_i*<Log(2)/Log(3)** cioè ***a_i/b_i*<0,63092975***,* il numero ottenuto è minore del numero iniziale **N** (si ha il cosidetto «scivolo»).

Continuando ancora si arriva ad una iterazione successiva unica in cui i valori totali passaggi pari di ***b_s*** e i valori totali passaggi dispari di ***a_s*** con ***b_s* > *a_s***, legati tra di loro dalle seguenti tre relazioni:

a) ***b_s*=ARR.ECC.[*a_s**1,5849625+log(N)/log(2)]** dove ***b_s*** *si arrotonda al numero intero successivo*
b) ***b_s* - *a_s*=ARR.ECC.[*a_s**0,5849625+log(N)/log(2);1]** dove ***b_s* - *a_s*** *si arrotonda al numero intero successivo*
c) ***b_s*+*a_s*=ARR.ECC.[*a_s**2,5849625+log(N)/log(2);1]** dove ***b_s*+*a_s*** *si arrotonda al numero intero successivo,*

sono tali che il numero ottenuto alla iterazione **s** è uguale ad 1 per cui la congettura è verificata. Inoltre, la successione continua sempre con il ciclo 1 – 4 – 2 – 1 in cui viene rispettata la relazioni a) precedente.

Riferimenti

[1] Eric Roosendaal, Sul http://www.ericr.nl/wondrous/index.html problema 3x + 1,

[2] Wei Ren, Simin Li, Ruiyang Xiao e Wei Bi, La congettura di Collatz per 2100000 −1 è vera- Algoritmi per la verifica di numeri estremamente grandi, Proc. di IEEE UIC, ottobre 2018, Guangzhou, Cina, 411-416, 2018

Contatti

Il mio blog **https://collatzardito.wordpress.com/** oppure
https://archive.org/search?query=collatz+ardito+nicola